Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
2^{do} Examen Parcial (36 %)
Ene-Mar 2018

Turno 5-6
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (4 ptos.) Halle $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\ln\big(\sqrt{2x+1}\big)-\ln\big(\sqrt{3x-1}\big)\Big)$

Solución: Dado que $\ln\big(a/b\big)=\ln(a)-\ln(b)$ y $\ln\big(a^r\big)=r\ln(a)$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\Big(\ln\big(\sqrt{2x+1}\big)-\ln\big(\sqrt{3x-1}\big)\Big) &= \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x-1}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\ln\left(\sqrt{\frac{2x+1}{3x-1}}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x-1}\right)=\frac{1}{2}\ln\big(2/3\big)\end{aligned}$$

ya que la función logaritmo es continua en todo su dominio.

Pregunta 2. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int\Big(\ln(x)\Big)^2\,\mathrm{d}x$

Solución: Integrando por partes se tiene,

$$\begin{array}{ll} f(x)=\ln(x) & f'(x)=1/x\\ g'(x)=\ln(x) & g(x)=x\,\big(\ln(x)-1\big)\end{array}$$

$$\begin{aligned}\int\Big(\ln(x)\Big)^2\,\mathrm{d}x &\overset{\downarrow}{=} x\ln(x)\,\big(\ln(x)-1\big)-\int\big(\ln(x)-1\big)\,\mathrm{d}x\\ &= x\ln(x)\,\big(\ln(x)-1\big)-x\big(\ln(x)-1\big)+x+C\\ &= x\Big(\big(\ln(x)-1\big)^2+1\Big)+C\end{aligned}$$

para cualquier valor de $C \in \mathbb{R}$, ya que

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\uparrow \\ f(x)=\ln(x) \qquad f'(x)=1/x \\ g'(x)=1 \qquad\quad g(x)=x}}{=} x\ln(x) - \int \mathrm{d}x = x\big(\ln(x)-1\big) + C$$

Pregunta 3. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-3x^2}}$

Solución:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-3x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3\Big(\frac{4}{9}-\big(x-\frac{1}{3}\big)^2\Big)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{4}{9}-\big(x-\frac{1}{3}\big)^2}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\operatorname{sen}(t) \\ \mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cos(t)\,\mathrm{d}t}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{3}\cos(t)}{\sqrt{\frac{4}{9}\big(1-\operatorname{sen}^2(t)\big)}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{3}}\,t + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{3x-1}{2}\right) + C$$

para cualquier valor de $C \in \mathbb{R}$.

Pregunta 4. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2+2x+3}{x(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{-3}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= -3\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \\
&= -3\ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x+1| + K
\end{aligned}$$

para cualquier valor de $K \in \mathbb{R}$, ya que

$$\frac{x^2+2x+3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

vale para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ si, y sólo si, $A=-3$, $B=3$ y $C=1$.

Pregunta 5. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \big(1-\cos^2(x)\big)\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \big(\cos^2(x)-\cos^4(x)\big)\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3(x)+\frac{1}{5}\cos^5(x)+C
\end{aligned}$$

para cualquier valor de $C \in \mathbb{R}$.